PHYSICS SOLVER

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι

Σχολή Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών

(Σ.Α.Τ.Μ. ΕΜΠ)

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΔΟΙ

2010-2011-2012

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΦΥΣΙΚΗΣ Ι**

Σχολή Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών (Σ.Α.Τ.Μ.)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ «ΦΥΣΙΚΗ Ι»

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΑΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2010

Σ.Α.Τ.Μ. ΕΜΠ

23-06-2010

ΘΕΜΑ 1^{O}

Η ολική δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα που κινείται στον άξονα των x είναι $F(v)=-cv^2$. Να αποδείξετε ότι: $x-x_o=(m/c)\ln(v_o/v)$, όπου v_o είναι η αρχική ταχύτητα (για t=0) και $x(0)=x_o$. [Δίνεται: $\int dx/x=\ln|x|+c$]

ΛΥΣΗ

Από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$m\frac{dv}{dt}=-cv^2 \Rightarrow -\frac{dv}{v^2}=\frac{c}{m}dt \Rightarrow \int -\frac{dv}{v^2}=\int \frac{c}{m}dt \Rightarrow$$

$$\int -\frac{dv}{v^2}=\int \frac{c}{m}dt \Rightarrow \frac{1}{v}=\frac{c}{m}t+c' \overset{t=0\rightarrow v=v_o}{\Rightarrow} c'=\frac{1}{v_o}$$

Άρα είναι: $\frac{1}{v}=\frac{c}{m}t+\frac{1}{v_o} \Rightarrow v=\frac{1}{\frac{c}{m}t+\frac{1}{v_o}}$ (1)

$$(1) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{c}{m}t + \frac{1}{v_o}} \Rightarrow dx = \frac{dt}{\frac{c}{m}t + \frac{1}{v_o}} \Rightarrow \int dx = \int \frac{dt}{\frac{c}{m}t + \frac{1}{v_o}} \Rightarrow$$

$$x = \frac{m}{c}\ln\left(\frac{c}{m}t + \frac{1}{v_o}\right) + c' \overset{t=0 \to x=x_o}{\Rightarrow} c' = x_o - \frac{m}{c}\ln\left(\frac{1}{v_o}\right)$$

Άρα είναι:

$$x = \frac{m}{c}\ln\left(\frac{c}{m}t + \frac{1}{v_o}\right) + x_o - \frac{m}{c}\ln\left(\frac{1}{v_o}\right) \overset{(1)}{\Rightarrow} x = \frac{m}{c}\ln\left(\frac{1}{v}\right) + x_o - \frac{m}{c}\ln\left(\frac{1}{v_o}\right) \Rightarrow$$

$$x - x_o = \frac{m}{c}\left[\ln\left(\frac{1}{v}\right) - \ln\left(\frac{1}{v_o}\right)\right] \Rightarrow x - x_o = \frac{m}{c}\ln\frac{\frac{1}{v}}{\frac{1}{v_o}} \Rightarrow x - x_o = \frac{m}{c}\ln\frac{v_o}{v}$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΦΥΣΙΚΗΣ Ι**

Σχολή Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών (Σ.Α.Τ.Μ.)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ «ΦΥΣΙΚΗ Ι»

ΦΥΣΙΚΗ Ι-ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ 2010

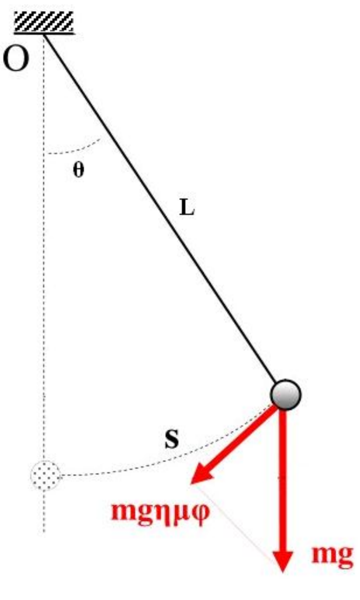
Σ.Α.Τ.Μ. ΕΜΠ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

Να γραφεί η διαφορική εξίσωση του απλού εκκρεμούς (μάζα m που κρέμεται από σκοινί μήκους L) για μικρές γωνιακές αποκλίσεις (όπου ημθ≈θ). Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας (ως προς το μέσον της και ως προς το άκρο της) ομοιόμορφης ράβδου μήκους L και μάζας M που έχει γραμμική πυκνότητα λ (λ=dm/dx).

ΛΥΣΗ

Α)



Η δύναμη επαναφοράς στην περίπτωση του απλού εκκρεμούς είναι:

$$F = -mg\eta\mu\theta \ (1)$$

Για πολύ μικρές γωνίες ισχύει ότι $\eta\mu\theta \approx \theta$

Άρα έχουμε ότι:

$$(1) \Rightarrow F = -mg\theta \Rightarrow ma = -mg\theta \Rightarrow m\frac{d^2S}{dt^2} = -mg\theta \overset{S=L\theta}{\Rightarrow} m\frac{d^2}{dt^2}(L\theta) = -mg\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta \Rightarrow L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \ (2)$$

Η τελευταία σχέση (2) παριστάνει τη διαφορική εξίσωση του απλού εκκρεμούς για μικρές γωνιακές αποκλίσεις.

Επίσης θα μπορούσε η (2) να εκφραστεί και με τη γωνιακή συχνότητα του απλού εκκρεμούς. Πιο συγκεκριμένα:

$$(1) \Rightarrow F = -mg\theta \overset{S=L\theta}{\Rightarrow} F = -mg\frac{S}{L} \Rightarrow F = -\frac{mg}{L}S$$

Άρα η σταθερά επαναφοράς είναι: $k = \frac{mg}{L}$

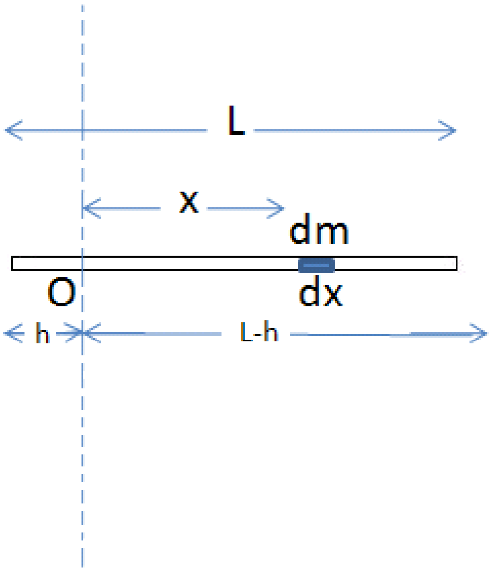
Έχουμε ότι:

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{L}$, όπου ω η γωνιακή συχνότητα.

Επομένως

$$(2) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

B)



Η ροπή αδράνειας δίνεται από τον τύπο:

$$I = \int x^2 dm$$

Όμως είναι:

$$\lambda = \frac{dm}{dx} \Rightarrow dm = \lambda dx \Rightarrow dm = \frac{M}{L} dx$$

Άρα:

$$I = \int x^2 dm = \frac{M}{L} \int_{-h}^{L-h} x^2 dx = \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-h}^{L-h} = \frac{M}{3L} [(L-h)^3 + h^3] \ (1)$$

Επομένως από την (1) μπορούμε να βρούμε την ροπή αδράνειας για οποιαδήποτε θέση του άξονα αλλάζοντας τις τιμές του h.

- Ως προς το μέσον: $\lambda = \frac{L}{2}$ $\quad (1) \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{\mathrm{M}}{3L}[\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}] = \frac{\mathrm{M}}{3L} \cdot \frac{2L^3}{8} = \frac{1}{12}\mathrm{M}L^2$
- Ως προς το άκρο: $\lambda = 0$ ή $\lambda = L$ $\quad (1) \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{\mathrm{M}}{3L}L^3 = \frac{1}{3}\mathrm{M}L^2$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΦΥΣΙΚΗΣ Ι**

Σχολή Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών (Σ.Α.Τ.Μ.)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ «ΦΥΣΙΚΗ Ι»

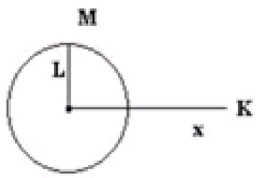
ΦΥΣΙΚΗ Ι-ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ 2010

Σ.Α.Τ.Μ. ΕΜΠ

ΘΕΜΑ 2^{O}

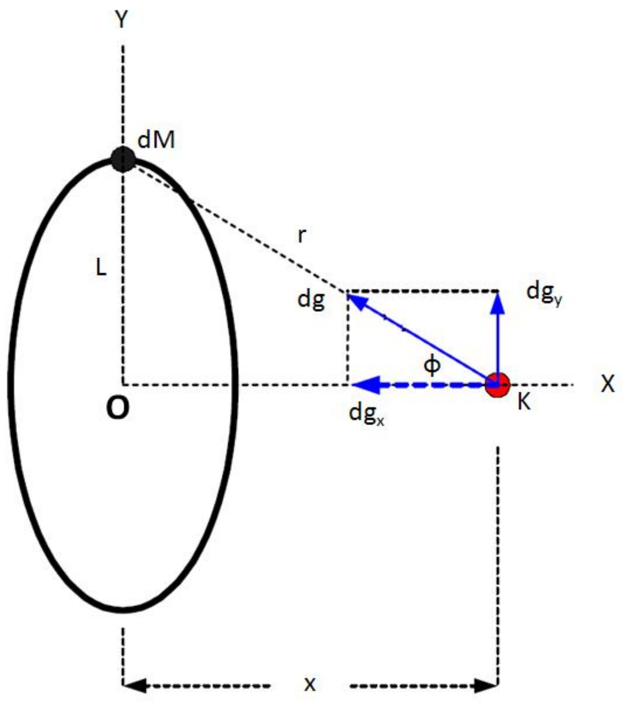
Α) Ένα σώμα σχήματος δακτυλίου ακτίνας L έχει μάζα Μ. Υπολογίστε το βαρυτικό πεδίο σε ένα σημείο Κ που απέχει απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου και βρίσκεται πάνω στον άξονα που περνά από το κέντρο και είναι κάθετος στο επίπεδο του δακτυλίου.

Β) Σώμα μάζας m πέφτει ελεύθερα προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα u_o (τη χρονική στιγμή t=0). Η αντίσταση του αέρα είναι –ku (k=σταθ.). Να υπολογισθεί η σχέση που δίνει τη ταχύτητα u(t).



ΛΥΣΗ

A)



Χωρίζουμε τον δακτύλιο σε στοιχειώδη κομμάτια dS, το καθένα με μάζα dM. Το καθένα από αυτά τα κομμάτια δημιουργεί στο σημείο Κ ένα βαρυτικό πεδίο dg με μέτρο:

$$dg = \frac{GdM}{r^2} = \frac{GdM}{x^2 + L^2}$$

Η συνιστώσα του πεδίου αυτού κατά μήκος του άξονα των x είναι:

$$dg_x = -dg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow dg_x = -\frac{GdM}{x^2 + L^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}} = -\frac{GdMx}{(x^2 + L^2)^{3/2}}$$

<u>Προσοχή:</u> Η συνιστώσα y του βαρυτικού πεδίου στο σημείο Κ είναι μηδέν διότι οι συνιστώσες y του πεδίου που οφείλονται σε δύο τμήματα που είναι διαμετρικά αντίθετα αλληλοαναιρούνται.

Για να βρούμε την ολική συνιστώσα του βαρυτικού πεδίου θα αθροίσουμε όλα τα dg_x. Δεδομένου ότι τα x, L είναι τα ίδια για κάθε κομμάτι dM πάνω στον δακτύλιο, απλώς αθροίζουμε όλα τα dM και παίρνουμε σαν αποτέλεσμα την ολική μάζα M.

Άρα έχουμε ότι:

$$g_x = -\frac{GMx}{(x^2 + L^2)^{3/2}}$$

B)

Εφαρμόζουμε τον 2$^{\text{ο}}$ Νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του σώματος (έστω μάζας m) και έχουμε:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow w - F_{\alpha\nu\tau} = ma \Rightarrow mg - ku = m\frac{du}{dt} \quad (1)$$

Η (1) είναι μια απλή διαφορική εξίσωση που λύνεται με τη μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών.

Έχουμε ότι:

$$(1) \Rightarrow \frac{m}{k}g - u = \frac{m}{k}\frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du}{\frac{m}{k}g - u} = \frac{k}{m}dt \Rightarrow \int \frac{du}{\frac{m}{k}g - u} = \int \frac{k}{m}dt \Rightarrow$$

$$-\ln\left(\frac{m}{k}g - u\right) = \frac{k}{m}t + C \Rightarrow \frac{m}{k}g - u = Ce^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow u = \frac{m}{k}g - Ce^{-\frac{k}{m}t} \quad (2)$$

Ισχύει ότι για $t = 0 \Rightarrow u = u_o = 0$

$$(2) \Rightarrow u_o = \frac{m}{k}g - C \Rightarrow C = \frac{m}{k}g - u_o \quad (3)$$

$$(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} u = \frac{m}{k}g - Ce^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow u = \frac{m}{k}g - \left(\frac{m}{k}g - u_o\right)e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{m}{k}g\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + u_o e^{-\frac{k}{m}t}$$

<u>Προσοχή: Η παραπάνω λύση δόθηκε θεωρώντας (+) προς τα κάτω.</u>

<u>Αν τυχόν θεωρήσετε ένα πιο αυστηρό σύστημα συντεταγμένων (+) κατακόρυφα προς τα πάνω (αυτό κάνουν σχεδόν όλοι οι συγγραφείς) η λύση δίνεται ως εξής.</u>

$$m\frac{du}{dt} = -mg - ku \Rightarrow \ldots \Rightarrow u = Ce^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

Ισχύει ότι για $t = 0 \Rightarrow u = u_o = 0$

$$\ldots \Rightarrow u_o = C - \frac{mg}{k} \Rightarrow C = \frac{mg}{k} + u_o$$

Άρα έχουμε ότι:

$$u = (\frac{mg}{k} + u_o)e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k} \Rightarrow u = -\frac{m}{k}g(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) + u_o e^{-\frac{k}{m}t}$$

Όπως βλέπετε η $2^{η}$ λύση διαφέρει στο πρόσημο – που υποδηλώνει ότι η ταχύτητα έχει φορά προς τα κάτω.

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΦΥΣΙΚΗΣ Ι**

Σχολή Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών (Σ.Α.Τ.Μ.)

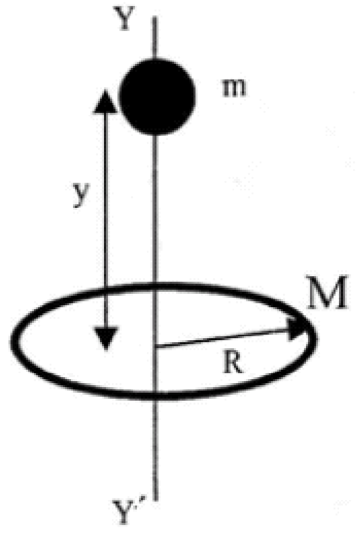
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ «ΦΥΣΙΚΗ Ι»

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΑΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2011 – Σ.Α.Τ.Μ ΕΜΠ

09-03-2012

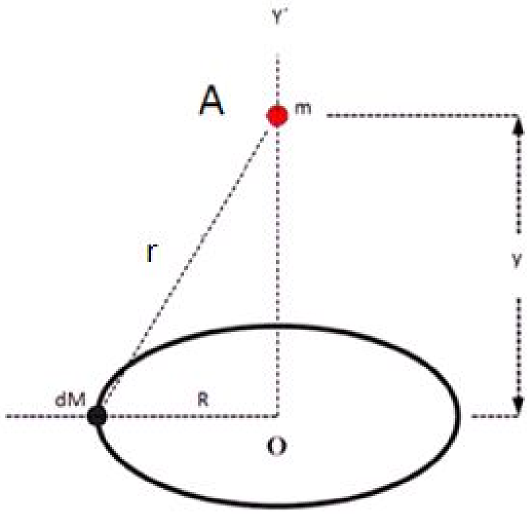
ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Μια σημειακή μάζα m βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας YY΄ ενός απομονωμένου δακτυλίου μάζας M και ακτίνας R. A) Υπολογίστε τη δυναμική ενέργεια της μάζας m και τη συνισταμένη δύναμη F_y που ασκεί η M πάνω στη μάζα m, για τυχαία θέση y της μάζας m πάνω στον άξονα YY΄. B) Με τι ταχύτητα θα περάσει η m από το κέντρο του δακτυλίου αν την αφήσουμε χωρίς αρχική ταχύτητα στη θέση y; (η m κινείται κατά τον άξονα συμμετρίας YY΄). *Σημ.*: Η βαρυτική δυναμική ενέργεια δύο μαζών m και M σε απόσταση r η μία από την άλλη, είναι: U=-GmM/r, ενώ η δύναμη F_y= -dU/dy.



ΛΥΣΗ

Α)1^{ος} Τρόπος



Χωρίζουμε τον δακτύλιο σε στοιχειώδη κομμάτια dS, το καθένα με μάζα $d\mathrm{M}$.

Η στοιχειώδης δυναμική ενέργεια λόγω της μάζας $d\mathrm{M}$ θα είναι:

$$dU = -\frac{Gmd\mathrm{M}}{r} = -\frac{Gmd\mathrm{M}}{\sqrt{y^2 + R^2}}$$

Για να βρούμε την ολική δυναμική ενέργεια U αθροίζουμε όλα τα dU. Δεδομένου ότι τα y, R είναι τα ίδια για κάθε κομμάτι $d\mathrm{M}$ πάνω στον δακτύλιο, απλώς αθροίζουμε όλα τα $d\mathrm{M}$ και παίρνουμε σαν αποτέλεσμα την ολική μάζα Μ.

Άρα έχουμε ότι:

$$U = -\frac{Gm\mathrm{M}}{\sqrt{y^2 + R^2}}$$

(Στο ίδιο καταλήγουμε με κάπως πιο πολύπλοκο τρόπο χρησιμοποιώντας την γραμμική πυκνότητα μάζας $\rho = \frac{d\mathrm{M}}{dS} = \frac{\mathrm{M}}{2\pi R}$, το γεγονός ότι $dS = Rd\theta$ και με ολοκλήρωση κατά μήκος του δακτυλίου από 0 έως 2π.)→ <u>Δεν το έκανα γιατί δεν υπάρχει λόγος σε αυτή την άσκηση.</u>

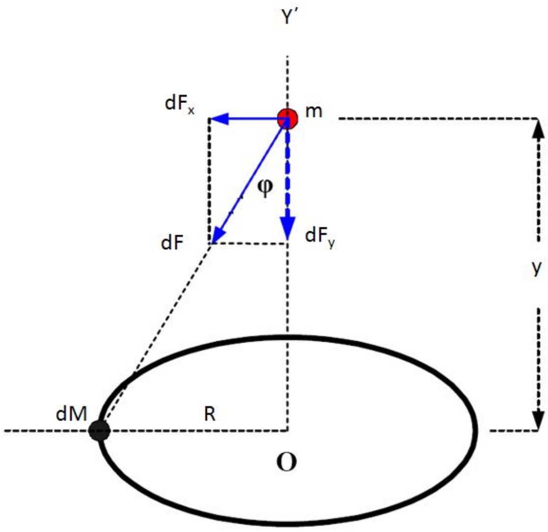
Στη συνέχεια υπολογίζουμε την F_y με βάση τον τύπο: $F_y = -\dfrac{dU}{dy}$

$$F_y = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d}{dy}\left(-\frac{Gm\mathrm{M}}{\sqrt{y^2+R^2}}\right) = Gm\mathrm{M}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+R^2}}\right) =$$

$$= Gm\mathrm{M}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+R^2}}\right) = Gm\mathrm{M}\frac{d}{dy}\left((y^2+R^2)^{-\frac{1}{2}}\right) = \ldots = -\frac{Gm\mathrm{M}y}{(y^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Το $-$ υποδηλώνει ότι η F_y έχει φορά προς τα κάτω, δηλαδή προς το κέντρο του δακτυλίου.

$2^{ος}$ Τρόπος (δεν ζητείται)



Χωρίζουμε τον δακτύλιο σε στοιχειώδη κομμάτια dS, το καθένα με μάζα $d\text{M}$. Το καθένα από αυτά τα κομμάτια ασκεί δύναμη μέτρου dF στη μάζα m.

$$dF = \frac{GmdM}{r^2} = \frac{GmdM}{y^2 + R^2}$$

Το μέτρο της συνιστώσας της δύναμης κατά μήκος του άξονα των y είναι:

$$dF_y = dF\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow dF_y = \frac{GmdM}{y^2 + R^2}\frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}} = \frac{GmydM}{(y^2 + R^2)^{3/2}}$$

Προσοχή: Η συνιστώσα x της δύναμης που ασκείται στη μάζα m είναι μηδέν διότι οι συνιστώσες x των δυνάμεων που οφείλονται σε δύο τμήματα που είναι διαμετρικά αντίθετα αλληλοαναιρούνται.

Για να βρούμε την ολική συνιστώσα F_y της δύναμης αθροίζουμε όλα τα dF_y. Δεδομένου ότι τα y, R είναι τα ίδια για κάθε κομμάτι $d\text{M}$ πάνω στον δακτύλιο, απλώς αθροίζουμε όλα τα $d\text{M}$ και παίρνουμε σαν αποτέλεσμα την ολική μάζα M.

Άρα έχουμε ότι:

$$F_y = \frac{GmMy}{(y^2 + R^2)^{3/2}}$$

Β) Από την διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$U_A + K_A = U_O + K_O \Rightarrow$$

$$-\frac{Gm\mathrm{M}}{\sqrt{y^2+R^2}} = -\frac{Gm\mathrm{M}}{R} + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{Gm\mathrm{M}}{R} - \frac{Gm\mathrm{M}}{\sqrt{y^2+R^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = Gm\mathrm{M}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{y^2+R^2}}\right) \Rightarrow \upsilon^2 = 2\mathrm{M}G\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{y^2+R^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = \left[2\mathrm{M}G\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{y^2+R^2}}\right)\right]^{1/2}$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΦΥΣΙΚΗΣ Ι**

Σχολή Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών (Σ.Α.Τ.Μ.)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ «ΦΥΣΙΚΗ Ι»

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΑΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2011 – Σ.Α.Τ.Μ ΕΜΠ

09-03-2012

ΘΕΜΑ 3^{O}

Σωμάτιο κινείται στον άξονα των x υπό την επίδραση δύναμης $F(x)=-kx+(k/\alpha)x^2$, όπου k και α είναι θετικές σταθερές. i) Ποια είναι η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας του σώματος U(x), εάν U(0)=0; (*Δίνεται*: ***F*=-*grad***U). ii) Να σχεδιάσετε την U(x) και να βρεθούν τα αντίστοιχα σημεία της ισορροπίας και το είδος ισορροπίας σε κάθε σημείο. iii) Εάν το σώμα ξεκινήσει από τη θέση x=-α με μηδενική αρχική ταχύτητα, να υπολογισθεί με πόση ταχύτητα θα περάσει από τις θέσεις όπου η δυναμική ενέργεια γίνεται μέγιστη και (τοπικά) ελάχιστη, αντίστοιχα.

ΛΥΣΗ

Δίνεται ότι: $F(x) = -kx + \frac{k}{\alpha}x^2$, με k, α θετικές σταθερές.

i)

Γενικά ισχύει ότι: $F = -gradU \Rightarrow F = -(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k})$

Στην περίπτωσή μας έχουμε $F = F(x)\vec{i}$ και επομένως ισχύει:

$$-(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k})=F(x)\vec{i}\Rightarrow U(x)=-\int F(x)dx \quad (1)$$

<u>Προσοχή:</u> Η σταθερά ολοκλήρωσης στο δεξιό μέλος της σχέσης (1) ορίζεται αυθαίρετα (π.χ. ίση με το μηδέν) εκτός εάν δίνονται οι αρχικές συνθήκες.

$$(1)\Rightarrow U(x)=-\int(-kx+\frac{k}{\alpha}x^2)dx\Rightarrow U(x)=\frac{1}{2}kx^2-\frac{k}{3\alpha}x^3+c$$

Όμως είναι $U(0)=0\Rightarrow c=0$

Άρα η δυναμική ενέργεια είναι:

$$U(x)=\frac{1}{2}kx^2-\frac{k}{3\alpha}x^3$$

ii)

Η λύση ισορροπίας (x_o) είναι η ρίζα της αλγεβρικής εξίσωσης $F(x)=0$

Διαφορετικά και δεδομένου ότι:

$$F(x)=-\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{dU}{dx},$$

θα μπορούσαμε να πούμε ότι <u>στα σημεία ισορροπίας η παράγωγος της δυναμικής ενέργειας μηδενίζεται</u> και επομένως η δυναμική ενέργεια στα σημεία ισορροπίας θα έχει ακρότατη τιμή (μέγιστο ή ελάχιστο) ή θα παρουσιάζει σημείο καμπής.

Βρίσκουμε τα σημεία ισορροπίας:

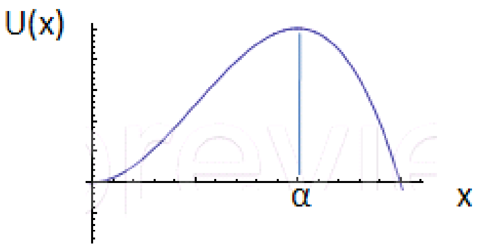
$$F(x)=0\Rightarrow -kx+\frac{k}{\alpha}x^2=0\Rightarrow x(\frac{k}{\alpha}x-k)=0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ ή } x=\alpha$$

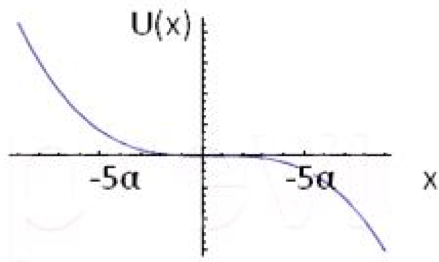
$U(x)=\frac{1}{2}kx^2-\frac{k}{3\alpha}x^3$ Γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας.

Ακολουθείστε το παρακάτω url για να δείτε το γραφικό (για k=30 και α=10)

http://www.wolframalpha.com/input/?i=Y%28x%29%3D15x2-x3



x → 0- $\frac{3a}{2}$



x → -7.5α -7.5α

Η συνάρτηση $U(x)=\frac{1}{2}kx^2-\frac{k}{3\alpha}x^3$

παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x=0 το

$U(0)=0$

και τοπικό μέγιστο στο x=α το

$U(\alpha)=\frac{1}{2}k\alpha^2-\frac{k}{3\alpha}\alpha^3=\frac{1}{6}k\alpha^2$

➔ Ένα σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές όταν το δυναμικό (δυναμική ενέργεια) στο σημείο αυτό έχει ελάχιστη τιμή

➔ Ένα σημείο ισορροπίας είναι ασταθές όταν το δυναμικό (δυναμική ενέργεια) στο σημείο αυτό έχει μέγιστη τιμή

x=0 (ευσταθές σημείο ισορροπίας)

x=α (ασταθές σημείο ισορροπίας)

iii) Η δυναμική ενέργεια στο $x=-\alpha$ είναι:

$$U(-\alpha)=\frac{1}{2}k(-\alpha)^2-\frac{k}{3\alpha}(-\alpha)^3=\frac{1}{2}k\alpha^2+\frac{1}{3}k\alpha^2=\frac{5}{6}k\alpha^2$$

Από την διατήρηση της ενέργειας ($\mathrm{E}=\mathrm{K}+U=\sigma\tau\alpha\theta$) έχουμε:

Για x=α (Η δυναμική ενέργεια γίνεται τοπικά μέγιστη) βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος.

$$\mathrm{E}=U(-\alpha)=\mathrm{K}_{x=a}+U(\alpha)\Rightarrow\frac{5}{6}k\alpha^2=\mathrm{K}+\frac{1}{6}k\alpha^2\Rightarrow\mathrm{K}=\frac{4}{6}k\alpha^2\Rightarrow\mathrm{K}=\frac{2}{3}k\alpha^2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{2}{3}k\alpha^2\Rightarrow\upsilon^2=\frac{4}{3}\frac{k\alpha^2}{m}\Rightarrow\upsilon=\sqrt{\frac{4k}{3m}}\alpha$$

Για x=0 (Η δυναμική ενέργεια γίνεται τοπικά ελάχιστη) βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος.

$$\mathrm{E}=U(-\alpha)=\mathrm{K}_{x=0}+U(0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{5}{6}k\alpha^2=\mathrm{K}\Rightarrow\frac{5}{6}k\alpha^2=\frac{1}{2}m\upsilon^2\Rightarrow\upsilon^2=\frac{5}{3}\frac{k\alpha^2}{m}\Rightarrow\upsilon=\sqrt{\frac{5k}{3m}}\alpha$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΦΥΣΙΚΗΣ Ι**

Σχολή Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών (Σ.Α.Τ.Μ.)

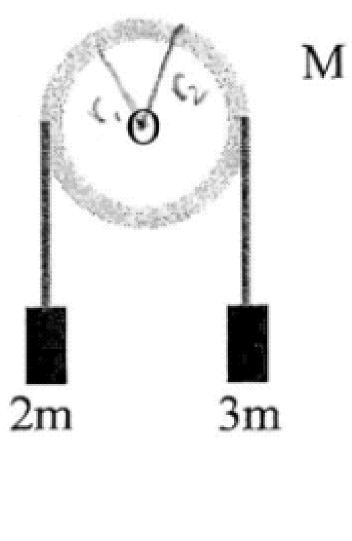
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ «ΦΥΣΙΚΗ Ι»

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΑΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2011 – Σ.Α.Τ.Μ ΕΜΠ

09-03-2012

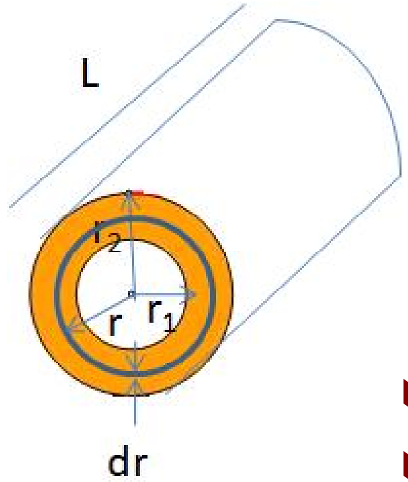
ΘΕΜΑ 4^{O}

Μάζες 2m και 3m κρέμονται με αβαρές και μη εκτατό νήμα, από τροχαλία μάζας M, που έχει μορφή κυλινδρικού δακτυλίου με ακτίνες R_1 (εσωτ.) και $R_2=2R_1$ (εξωτ.). Να υπολογίσετε: α) τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα συμμετρίας της (σημείο O), θεωρώντας ότι οι ακτίνες της τροχαλίας έχουν αμελητέα μάζα, β) Θεωρήστε ότι στο πεδίο βαρύτητας g το νήμα κινείται μαζί με την περιφέρεια της τροχαλίας χωρίς ολίσθηση. Να υπολογισθεί η γραμμική επιτάχυνση με την οποία κινούνται οι μάζες 2m και 3m, καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση με την οποία περιστρέφεται η τροχαλία.



ΛΥΣΗ

α)



Η ροπή αδράνειας είναι: $I=\int r^2 dm$

Όμως για τον στοιχειώδη όγκο ενός λεπτού κυλινδρικού φλοιού ακτίνας r, πάχους dr και μήκους L έχουμε:

dm=ρdV$\Rightarrow$ dm=2πrρLdr$\Rightarrow$ dm=2πρLrdr (όπου ρ η πυκνότητα)

Άρα έχουμε:

$$I=\int r^2 dm \Rightarrow I=\int_{r_1}^{r_2} r^2 2\pi\rho L r dr = 2\pi\rho L\int_{r_1}^{r_2} r^3 dr =$$

$$=2\pi\rho L\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r_1}^{r_2} = 2\pi\rho L\left(\frac{r_2^4}{4}-\frac{r_1^4}{4}\right)=\frac{\pi\rho L}{2}(r_2^4-r_1^4)=$$

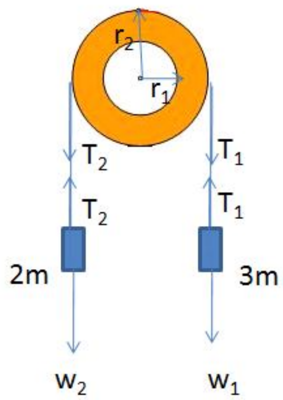
$$=\frac{\pi\rho L}{2}(r_2^2-r_1^2)(r_2^2+r_1^2)$$

Αν είναι M η ολική μάζα και V ο ολικός όγκος του κυλινδρικού δακτυλίου τότε ισχύει ότι: M=ρV

$V=\pi r_2^2 L-\pi r_1^2 L=\pi L(r_2^2-r_1^2)$ και $M=\pi\rho L(r_2^2-r_1^2)$

Άρα η ροπή αδράνειας του δακτυλίου θα είναι: $I = \frac{1}{2}M(r_1^2 + r_2^2)$

β)



$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$

$\Rightarrow T_1 \cdot r_2 - T_2 \cdot r_2 = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (1)

$\Sigma F_1 = m_1 \cdot \alpha_1$

$\Rightarrow w_1 - T_1 = 3m\alpha_1 \Rightarrow w_1 - T_1 = 3m\alpha$ (2) $(\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha)$

$\Sigma F_2 = m_2 \cdot \alpha_2$

$\Rightarrow T_2 - w_2 = 2m\alpha_2 \Rightarrow T_2 - w_2 = 2m\alpha$ (3) $(\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha)$

$\alpha = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r_2$ (4)

$(1) \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} (w_1 - 3m\alpha) \cdot r_2 - (w_2 + 2m\alpha) \cdot r_2 = \frac{1}{2}M(r_1^2 + r_2^2) \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$

$\overset{(4)}{\Rightarrow} (3mg - 3m\alpha) \cdot r_2 - (2mg + 2m\alpha) \cdot r_2 = \frac{1}{2}M(r_1^2 + r_2^2) \cdot \frac{\alpha}{r_2} \Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow \alpha = \frac{mgr_2^2}{\frac{1}{2}M(r_1^2 + r_2^2) + 5mr_2^2} \overset{r_2 = 2r_1}{\Rightarrow} \alpha = \frac{4mgr_1^2}{\frac{5}{2}Mr_1^2 + 20mr_1^2} = \frac{4mg}{\frac{5}{2}M + 20m} = \frac{8mg}{5M + 40m}$

$$(4) \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{mgr_2}{\frac{1}{2}M(r_1^2 + r_2^2) + 5mr_2^2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{8mg}{(5M + 40m)r_2} \overset{r_2=2r_1}{\Rightarrow} \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{4mg}{(5M + 40m)r_1}$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΦΥΣΙΚΗΣ Ι**

Σχολή Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών (Σ.Α.Τ.Μ.)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ «ΦΥΣΙΚΗ Ι»

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΑΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2011 - Σ.Α.Τ.Μ. ΕΜΠ

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα (εντός βαρυτικού πεδίου) προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα **v$_o$** (για t=0) από τη θέση (0,0). Εάν η αντίσταση του αέρα (**f**) είναι ανάλογη της ταχύτητας του σώματος [**f**(v)=-k**v**], να βρείτε α) τη (διαφορική) εξίσωση κίνησης, β) την ταχύτητα v(t) και γ) τη θέση y(t), του σώματος τη χρονική στιγμή t, και δ) σε ποιά χρονική στιγμή το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος; [*Δίνεται*: $\int dx/x = \ln|x| + c$ και $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$].

ΛΥΣΗ

Με θετική κατεύθυνση ($\upsilon_o > 0$) προς τα πάνω από τον 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

Α) $m\frac{d\upsilon}{dt} = -mg - k\upsilon \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - k\frac{dy}{dt} \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{dy}{dt} = -mg$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dy}{dt} = -g$ (1)

B)

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=-mg-k\upsilon \Rightarrow \frac{d\upsilon}{mg+k\upsilon}=-\frac{dt}{m} \Rightarrow \int \frac{d\upsilon}{mg+k\upsilon}=\int -\frac{dt}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}\ln(mg+k\upsilon)=-\frac{t}{m}+c \overset{t=0\to\upsilon=\upsilon_o}{\Rightarrow} c=\frac{1}{k}\ln(mg+k\upsilon_o)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}\ln(mg+k\upsilon)=-\frac{t}{m}+\frac{1}{k}\ln(mg+k\upsilon_o) \Rightarrow \frac{1}{k}\ln(\frac{mg+k\upsilon}{mg+k\upsilon_o})=-\frac{t}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(\frac{mg+k\upsilon}{mg+k\upsilon_o})=-\frac{kt}{m} \Rightarrow \frac{mg+k\upsilon}{mg+k\upsilon_o}=e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow mg+k\upsilon=(mg+k\upsilon_o)e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon=(\frac{mg}{k}+\upsilon_o)e^{-\frac{kt}{m}}-\frac{mg}{k} \Rightarrow \upsilon=\frac{mg}{k}(e^{-\frac{kt}{m}}-1)+\upsilon_o e^{-\frac{kt}{m}} \quad (2)$$

Γ)

$$\upsilon=(\frac{mg}{k}+\upsilon_o)e^{-\frac{kt}{m}}-\frac{mg}{k} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=(\frac{mg}{k}+\upsilon_o)e^{-\frac{kt}{m}}-\frac{mg}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\int\left((\frac{mg}{k}+\upsilon_o)e^{-\frac{kt}{m}}-\frac{mg}{k}\right)dt \Rightarrow y=-\frac{m}{k}(\frac{mg}{k}+\upsilon_o)e^{-\frac{kt}{m}}-\frac{mg}{k}t+c$$

$$\overset{t=0\to y=0}{\Rightarrow} c=\frac{m}{k}(\frac{mg}{k}+\upsilon_o) \Rightarrow y=-\frac{m}{k}(\frac{mg}{k}+\upsilon_o)e^{-\frac{kt}{m}}-\frac{mg}{k}t+\frac{m}{k}(\frac{mg}{k}+\upsilon_o) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-(\frac{m^2g}{k^2}+\frac{m\upsilon_o}{k})e^{-\frac{kt}{m}}+(\frac{m^2g}{k^2}+\frac{m\upsilon_o}{k})-\frac{mg}{k}t \Rightarrow$$

$$y=(\frac{m^2g}{k^2}+\frac{m\upsilon_o}{k})(1-e^{-\frac{kt}{m}})-\frac{mg}{k}t \quad (3)$$

Δ) Το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος όταν η ταχύτητα στιγμιαία γίνει μηδέν: $\upsilon = 0$. Επομένως ο χρόνος βρίσκεται εύκολα από την (2).

$$(2) \overset{\upsilon=0}{\Rightarrow} t = ...$$

Για να γλυτώσουμε κάποιες πράξεις δεν ξεκινάμε από την (2) αλλά από κάποιο σημείο πριν φτάσουμε σε αυτήν (βλέπε Β) ερώτημα)

$$\frac{1}{k}\ln\left(\frac{mg+k\upsilon}{mg+k\upsilon_o}\right) = -\frac{t}{m} \Rightarrow t = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{mg+k\upsilon_o}{mg+k\upsilon}\right) \overset{\upsilon=0}{\Rightarrow} t = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{mg+k\upsilon_o}{mg}\right)$$

<u>Προσέξτε ένα EXTRA ερωτήμα που είχε μπει παλιότερα στο φυσικό ΑΠΘ και στους χημικούς Μηχανικούς ΕΜΠ πάνω στην ίδια ακριβώς εκφώνηση με μοναδική διαφορά ότι η αντίσταση του αέρα είναι:</u> $-mk\upsilon$

Να αποδείξετε ότι:

$$y = \frac{\upsilon_o - \upsilon}{k} - \frac{g}{k^2}\ln\left(\frac{1+\frac{k\upsilon_o}{g}}{1+\frac{k\upsilon}{g}}\right)$$

Προσπαθήστε να το δείξετε: παρουσιάζει ενδιαφέρον

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΦΥΣΙΚΗΣ Ι**

Σχολή Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών (Σ.Α.Τ.Μ.)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ «ΦΥΣΙΚΗ Ι»

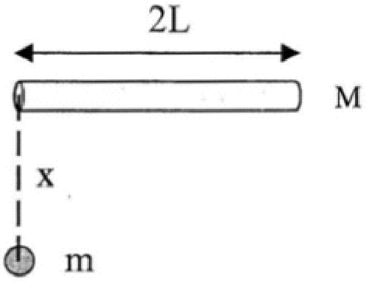
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΑΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2011 - Σ.Α.Τ.Μ. ΕΜΠ

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Α) Μια ομοιογενής σφαίρα μάζας m, τοποθετείται σε απόσταση x από το άκρο λεπτής, ομοιογενούς ράβδου μήκους 2L, μάζας M και γραμμικής πυκνότητας ρ. Υπολογίστε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος ράβδος-σφαίρα. Τι συμβαίνει όταν το x είναι πολύ μεγαλύτερο του L; (*Σημ.*: Η βαρυτική δυναμική ενέργεια δύο μαζών m και M σε απόσταση r η μία από την άλλη, δίνεται από τον τύπο: U=-GmM/r).

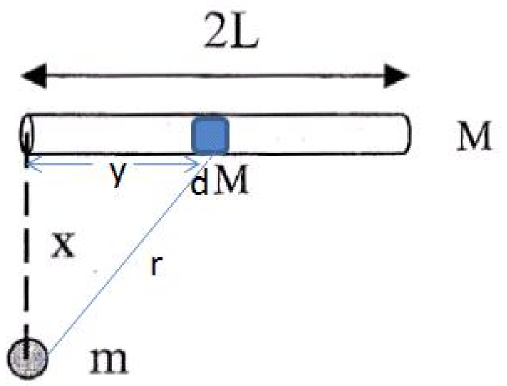
Δίνεται: $\int \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln(y+\sqrt{x^2+y^2})$

Β) Στερεό σώμα μάζας m περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που περνά από το σημείο Ο. Εάν το κέντρο μάζας (Κ.Μ.) απέχει απόσταση b από το Ο, i) να βρείτε την εξίσωση κίνησης του στερεού σώματος και ii) να αποδείξετε ότι για μικρές γωνιακές αποκλίσεις θ από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας, η κίνηση είναι απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογισθεί η συχνότητά της (φυσικό εκκρεμές).



ΛΥΣΗ

Α)



Η γραμμική πυκνότητα μάζας είναι: $\rho = \dfrac{dM}{dy} = \dfrac{M}{2L}$

Έχουμε ότι:

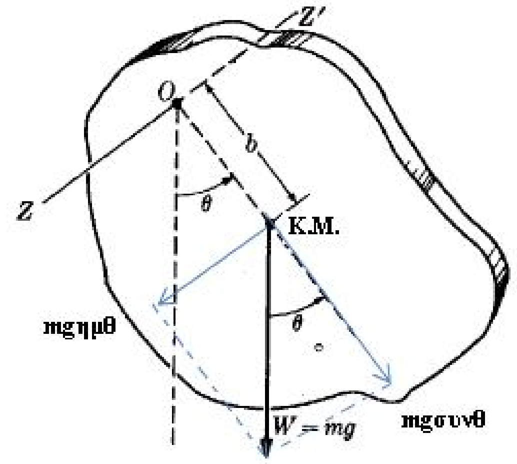
$$dU = -\frac{GmdM}{r} \Rightarrow dU = -\frac{Gm\rho dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (1)$$

Από την (1) βρίσκουμε το ζητούμενο με ολοκλήρωση:

$$(1) \Rightarrow U = -Gm\rho \int_0^{2L} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow U = -Gm\rho \left[\ln\left(y + \sqrt{x^2+y^2} \right) \right]_0^{2L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = -Gm\rho \ln\left(\frac{2L+\sqrt{x^2+4L^2}}{x} \right) \Rightarrow U = -\frac{GmM}{2L} \ln\left(\frac{2L+\sqrt{x^2+4L^2}}{x} \right)$$

B)



i) Το βάρος w προκαλεί ροπή γύρω από το Ο που το μέτρο της είναι:

$\tau = wb\eta\mu\theta \Rightarrow \tau = mgb\eta\mu\theta \quad (1)$

Ισχύει ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης:

$$\Sigma\tau = \mathrm{I}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow -mgb\eta\mu\theta = \mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgb}{\mathrm{I}}\right)\eta\mu\theta = 0 \quad (2)$$

ii) Για μικρές γωνίες εκτροπής έχουμε: $\eta\mu\theta \approx \theta$

Οπότε $(2) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgb}{\mathrm{I}}\right)\theta = 0 \quad (3)$

Η εξίσωση (3) περιγράφει απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgb}{\mathrm{I}}} \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = \sqrt{\frac{mgb}{\mathrm{I}}} \Rightarrow \mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{mgb}}$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΦΥΣΙΚΗΣ Ι**

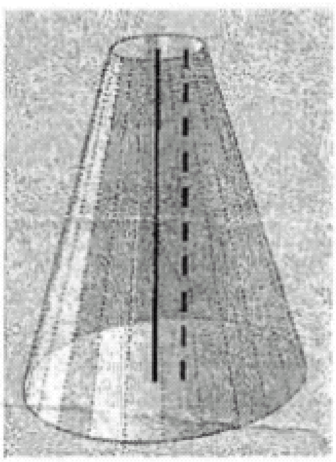
Σχολή Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών (Σ.Α.Τ.Μ.)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ «ΦΥΣΙΚΗ Ι»

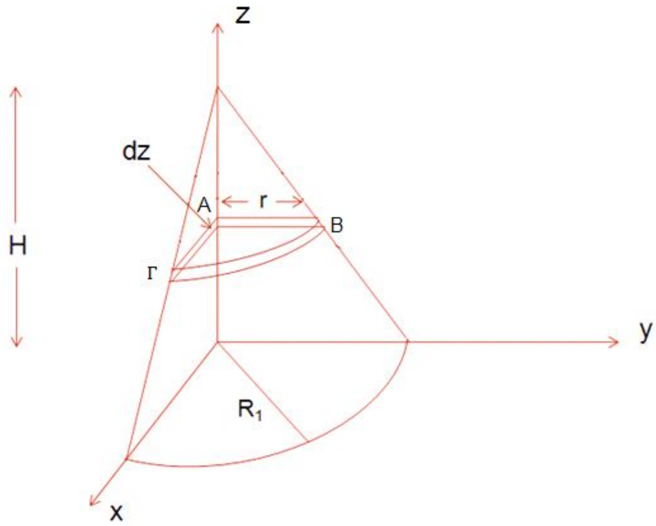
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΑΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2011 - Σ.Α.Τ.Μ. ΕΜΠ

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

Ομοιογενής συμπαγής κόλουρος κώνος μάζας M, ύψους h (αντίστοιχα, το ύψος του θα ήταν H, εάν ο κώνος δεν ήταν κόλουρος), ακτίνας βάσης R_1 και ακτίνας κορυφής R_2, περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ΟΟ΄ (διακεκομμένη γραμμή) που απέχει απόσταση d από παράλληλο άξονα (συνεχής γραμμή) που περνά από το κέντρο της βάσης και της κορυφής του. Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα ΟΟ΄. [*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων: $I_{οο΄}=I+Md^2$. Επίσης, δίνεται ο όγκος κώνου (V), με ακτίνα βάσης R και ύψος H, ως $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$ και η ροπή αδράνειας $I_{ΚΔ}$ κυκλικού δίσκου ακτίνας r και μάζας m, $I_{ΚΔ}=\frac{1}{2}mr^2$].



ΛΥΣΗ



Η ροπή αδράνειας ενός κυκλικού κυλινδρικού δίσκου ακτίνας r δίνεται από τον τύπο $I=\frac{1}{2}mr^2$ (δίνεται στην εκφώνηση).

Θεωρούμε τον κυκλικό κυλινδρικό δίσκο του οποίου το ένα τέταρτο φαίνεται στο σχήμα (ΑΒΓ). Τότε σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση αυτός θα έχει ροπή αδράνειας ίση με:

$$\frac{1}{2}\pi r^2 \rho dz r^2 = \frac{1}{2}\pi\rho r^4 dz$$

($m=\rho dV \Rightarrow m=\rho\pi r^2 dz$, όπου ρ η πυκνότητα)

Από το παραπάνω σχήμα και με απλές αναλογίες έχουμε:

$$\frac{H-z}{H}=\frac{r}{R_1}\Rightarrow r=\frac{H-z}{H}R_1$$

Η ολική ροπή αδράνειας του κόλουρου κώνου γύρω από τον άξονα z είναι:

$$I=\frac{1}{2}\pi\rho\int_0^h\left(\frac{H-z}{H}R_1\right)^4 dz=\ldots=\frac{1}{2}\pi\rho\frac{R_1^4}{H^4}\left[-\frac{(H-z)^5}{5}\right]_0^h=\ldots=$$

$$=\frac{1}{10}\pi\rho\frac{R_1^4}{H^4}\left[H^5-(H-h)^5\right] \quad (1)$$

Ό όγκος του κώνου είναι γενικά $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$ (δίνεται στην εκφώνηση).

Άρα ο όγκος (V_κ) του κόλουρου κώνου θα είναι:

$$V_\kappa=\frac{1}{3}\pi R_1^2 H-\frac{1}{3}\pi R_2^2(H-h)$$

Όμως είναι: $\rho=\frac{\mathrm{M}}{V_\kappa}$

Άρα η (1) γίνεται:

$$I=\frac{1}{10}\pi\frac{\mathrm{M}}{\frac{1}{3}\pi R_1^2 H-\frac{1}{3}\pi R_2^2(H-h)}\frac{R_1^4}{H^4}\left[H^5-(H-h)^5\right]\Rightarrow$$

$$I=\frac{3}{10}\frac{\mathrm{M}R_1^4\left[H^5-(H-h)^5\right]}{H^4\left[R_1^2 H-R_2^2(H-h)\right]}$$

Επομένως τελικά είναι:

$$I_{OO'}=I+\mathrm{M}d^2=\ldots$$